

ANALISIS COMBINATORIO.

TEOREMA FUNDAMENTAL:

Si un suceso puede tener lugar de m maneras distintas y cuando ocurre una de ellas se puede realizar otro suceso inmediatamente de n formas diferentes, ambos sucesos, sucesivamente, pueden ocurrir de $m \cdot n$ maneras distintas.

Por ejemplo: si hay 3 candidatos para la presidencia y 5 para vicepresidencia, existen $3 \cdot 5 = 15$ parejas distintas de presidente y vicepresidente.

NOTACION FACTORIAL:

Las identidades siguientes muestran el significado de factorial n escrito $n!$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

$0! = 1$ por definición.

I VARIACIONES.

Una variación es un arreglo ordenado de n objetos diferentes, tomados de r a la vez se denota por medio de:

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo: Una persona desea hacer una apuesta y selecciona los tres primeros lugares al finalizar la carrera. Si en ella participan 8 caballo, ¿ Qué posibilidades existen para los tres primeros caballos '? (Suponiendo que no haya empate).

$$V_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 336$$

II PERMUTACIONES.

La permutación es un arreglo ordenado de un conjunto de elementos. Pongamos el caso de tres números: $\{ 1, 2, 3 \}$. Una permutación de ellos es 123, otra es 321, he aquí todas las ordenaciones que pueden formarse con ellos: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

El número de permutaciones de n elementos diferentes tomados n a la vez, se denota mediante.

$$P_n^n = n!$$

PERMUTACIONES CON REPETICION DE n ELEMENTOS

El número de permutaciones de n elementos repitiéndose uno de ellos n_1 veces, otro, n_2 veces, etc... Viene dado por:

$$P_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k}^{n, n, n, \dots, n} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * n_3! * \dots * n_k!} \text{ siendo } n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$$

Por ejemplo, el número de maneras en que se puede distribuir 3 monedas de 25 pesos y 7 monedas de 5, entre 10 niños de forma que a cada uno de ellos le corresponda 1 sola moneda.

$$P_{3,7}^{10} = \frac{10!}{3! * 7!} = \frac{8 * 9 * 10}{1 * 2 * 3} = 120 \text{ maneras}$$

PERMUTACIONES CÍCLICAS.

El número de maneras en que se pueden colocar n elementos diferentes a lo largo de una circunferencia, es igual a $(n - 1)!$.

$$P_n^c = (n - 1)!$$

Por ejemplo, 10 personas se pueden sentar alrededor de una mesa redonda de ¿Cuántas maneras?

$$P_{10}^c = (10 - 1)! = 9! = 362880 \text{ maneras.}$$

III COMBINACIONES:

La combinación es un conjunto de elementos, sin que se preste atención a su orden ni a su arreglo. Una combinación de r elementos escogidos en un conjunto de n elementos es un subconjunto del conjunto de n elementos.

Por ejemplo, las combinaciones de las 3 letras a,b,c tomadas de 2 en 2 es ab,bc,ac, cualquiera de estas disposiciones es una combinación.

Obsérvese que ab y ba son una misma combinación (se prescinde del orden), de las letras a y b.

Su forma viene dada por:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! * r!}$$

Esta fórmula nos denota el número de combinaciones de r elementos que pueden seleccionarse de n elementos.

Por ejemplo, el número de saludos que pueden intercambiar entre sí 12 personas, si cada una saluda una de las otras.

$$C_{2}^{12} = \frac{12!}{(12-2)! \cdot 2!} = 66$$

NUMERO TOTAL DE COMBINACIONES DE n ELEMENTOS.

El número total de combinaciones de n elementos distintos tomados de 1, 2, 3,..., n. Viene dado por:

$$C = 2^n - 1.$$

Por ejemplo, una persona tiene en su bolsillo una moneda de 1 peso, otra de 5, otra de 50. El número total de formas en que puede sacar de su bolsillo cantidades diferentes de dinero es:

$$C = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7.$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Hallar el número de formas en que se pueden colocar en fila 4 cuadros de una colección que se compone de 12 cuadros.

El primer lugar lo puede ocupar cualquiera de los 12 cuadros. El segundo uno cualquiera de los 11 restantes, el tercero uno cualquiera de los 10 y así sucesivamente:

Número de formas = número de variaciones de 12 elementos tomados de 4 en 4.

$$V_4^{12} = \frac{12!}{(12-4)!} = 11880$$

2.- ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar 5 personas en una fila?

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

3.- ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar 7 libros sobre una estantería?

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$

4.- ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa redonda?

Supongamos que una de ellas se sienta en un lugar cualquiera. Las 4 personas restantes se pueden sentar de 4! formas.

$$4! = 24 \text{ maneras.}$$

5.- ¿De cuántas maneras se pueden sentar 8 personas alrededor de una mesa redonda, de forma que 2 de ellas estén siempre sentadas juntas?

Consideremos a las 2 personas que deben estar juntas como una sola. Como hay 2! formas de disponer a estas 2 personas entre sí, y 6! formas de colocar a 7 personas alrededor de una mesa circular, el número pedido será:

$$2! \cdot 6! = 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440.$$

6.- Los organizadores del Superbowl están escogiendo a los árbitros del partido. Entre 12 árbitros elegibles se seleccionaron a 5, ¿Cuántos equipos de 5 árbitros pueden formarse con los 12?

$$C_5^{12} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = 792$$

7.- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 7 cuadrados diferentes en una fila, sabiendo que uno de ellos debe estar:

En el centro.

En uno de los extremos.

Como el cuadrado en cuestión debe situarse en el centro, sólo quedan 6 cuadrados para colocar en la fila, por lo tanto, se puede hacer.

$$P_6^6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Una vez colocado el cuadro en uno de los extremos, los otros 6 se pueden disponer igual que en el caso anterior.

$$P_6^6 = 6! = 720$$

En consecuencia, si se toman los dos casos:

$$2 P_6^6 = 2 \cdot 6! = 2 \cdot 720 = 1440.$$

PERMUTACIONES CON REPETICION DE n ELEMENTOS.

1.- a) Hallar el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra COOPERADOR,

b) ¿Cuántas de estas palabras tiene juntas las letras O?

c) ¿Cuántas empiezan con las dos letras R juntas?

a) La palabra cooperador consta de 10 letras con 3O y 2R, y 5 letras diferentes, por lo tanto el número de palabras que se pueden formar viene dado por:

$$P_{3, 2}^{10,10} = \frac{10!}{3! \cdot 2!} = 302400.$$

b) Considerando las 3 O como una sola letra, tendremos 8 letras de las cuales 2 son R.

$$P_2^8 = \frac{8!}{2!} = 20160.$$

c) El número de palabras que se pueden formar con las 8 letras restantes, de las cuales hay 3 =, es:

$$P_3^8 = \frac{8!}{3!} = 6720.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1.- Determinar el valor de:

a) $P_3^8 =$

b) $P_4^{24} =$

c) $P_4^{10} =$

d) $C_{14}^{19} =$

e) $C_1^{20} =$

f) $C_2^8 =$

g) $P_4^7 : P_4^5 =$

h) $P_3^5 \cdot P_2^3 =$

2.- Se dispone de los dígitos 2, 3, 4, 5, 8 y 9, sin repeticiones:

a) ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con ellos?

b) ¿Cuántos de los números obtenidos en a) son menores de 400?

c) ¿Cuántos de los números obtenidos en a) son pares?

d) ¿Cuántos de los números obtenidos en a) son múltiplos de 5?

3.- ¿Cuántos signos diferentes pueden hacerse con 6 banderitas, si 4 de ellas son rojas y 2 azules?

4.- ¿Cuántas ordenaciones pueden obtenerse con todas las letras de las siguientes palabras?:

ave.

escuela.

alfalfa.

5.- ¿De cuántas formas puede constituirse un comité de 5 personas elegidas entre 2 agrónomos, 6 forestales y 4 veterinarios?, si deben estar:

- a) Siempre los 4 veterinarios.
- b) Exactamente 2 forestales.
- c) Máximo 3 forestales.
- d) Exactamente 1 veterinario y 1 agrónomo.
- e) Debe haber al menos un veterinario.

6.-Un estudiante elige 8 de 10 preguntas en una prueba:

- a) De cuántas formas pudo responder.
- b) Si ha contestado las primeras 3 ¿De cuántas formas puede responder el resto?

7.- Hallar cuántos números impares de 3 cifras, se pueden formar con los dígitos:

- a) 1,2,3,4.
- b) 1,2,4,6,8.

De manera que contenga dos cifras iguales y una distinta.

8.- ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una fila 3 niñas y 3 niños de manera que no haya dos niñas, ni dos niños ocupando lugares contiguos?

9.- ¿Cuántas jugadas distintas se pueden presentar al lanzar 3 dados?

10.- ¿De cuántas formas se pueden sentar 4 hombres y 4 mujeres alrededor de una mesa redonda? De manera que no haya 2 hombres juntos.

11.- ¿De cuántas maneras se pueden sentar 6 personas en un sillón?

12.- ¿De cuántas formas se pueden sentar 4 personas en una mesa redonda?

13.- ¿De cuántas formas se puede hacer un collar que contiene 5 perlas de distinto color si se dispone de 7 perlas de distinto color?

14.- ¿De cuántas maneras se pueden sentar 4 mujeres y 5 hombres en una mesa redonda?

15.- ¿Cuántos grupos de investigación de 6 miembros se pueden formar con 5 físicos, 4 químicos y 3 matemáticos, de manera que en cada grupo hallan, 3 físicos, 2 químicos y un matemático.

16.- ¿Cuántos grupos se pueden formar con 8 mujeres sabiendo que en cada uno de ellos debe haber por lo menos 3?

17.- Una caja contiene 7 tarjetas rojas, 6 blancas y 4 azules. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 3 tarjetas? De forma que:

Todas sean rojas.

Ninguna sea roja.

18.- Hallar el número de ordenaciones que se pueden formar con las letras de la palabra TENNESSEE.

19.- Se dispone de 4 objetos diferentes ¿De cuántas maneras se puede disponer de uno o más de dichos objetos?

20.- ¿De cuántas maneras se pueden elegir 2 o más corbatas de entre una colección de 8 corbatas?

21.- ¿Cuántos números entre 3000 y 5000 se pueden formar con los 7 dígitos: 0,1,2,3,4,5,6 , sin repetición?

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS:

- | | | | |
|-----------|-----------------------|-----------------|--------|
| 1.- | 6.- a) 1814400 b) 120 | 7.- a) 18 b) 12 | 8.- 72 |
| a) 336 | 9.- 216 | | |
| b) 255024 | 10.- 144 | | |
| c) 5040 | 11.- 720 | | |
| d) 11628 | 12.- 6 | | |
| e) 20 | 13.- 2520 | | |
| f) 28 | 14.- 40320 | | |
| g) 7 | 15.- 180 | | |
| h) 360. | 16.- 219 | | |
| 2.- | | | |
| a) 120 | | | |
| b) 40 | 17.- | | |
| c) 60 | a) 35 | | |
| d)20 | b) 120 | | |
| | 18.- 3780 | | |
| 3.- 15 | 19.- 15 | | |
| 4.- | 20.- 247 | | |
| 6 | | | |
| 2520 | | | |
| 210 | 21.- 240 | | |
| 5.- | | | |
| a) 8 | | | |
| b) 300 | | | |
| c) 696 | | | |
| d) 160 | | | |
| e) 736 | | | |